T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 8 - POWTÓRKOWA

Wrocław, 18 kwietnia 2010

ZADANIE 1. a) Na płaszczyźnie zadajemy ciąg rekurencyjny

$$(x_0, y_0) = (1, 1), \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = (\tfrac{4}{3}x_n, \tfrac{1}{4}y_n + 1).$$

Znajdź granicę tego ciągu.

b) Zrób to samo zadanie przy $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

ZADANIE 2. Niech C_0 oznacza zbiór ciągów rzeczywistych nieujemnych ściśle malejących do zera, z metryką supremum. Zadajemy odwzorowanie

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

to znaczy $f((x_1, x_2, x_3, ...)) = (x_2, x_3, x_4, ...)$. Czy jest to odwzorowanie zbliżające? Czy zachodzi zbieżność wszystkich trajektorii do tego samego ciągu? Dlaczego?

ZADANIE 3. Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągła, to jej wykres $F = \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$ jest domknięty w przestrzeni produktowej $X \times Y$ z metryką supremum.

ZADANIE 4. a) Podaj przykład funkcji ciągłej i surjektywnej $f : X \to Y$ oraz zbiór $A \subset X$ taki, że zbiory $f(\partial A)$ i $\partial(f(A))$ są rozłączne w Y (∂ oznacza brzeg zbioru).
b) A teraz wskaż zbiór $B \subset Y$ taki, że $f^{-1}(\partial B)$ i $\partial(f^{-1}(B))$ są rozłączne w X.

ZADANIE 5. Udowodnij, że zupełność przestrzeni (X, d) jest równoważna z takim oto warunkiem:
Dla każdego zstępującego ciągu zbiorów A_n o średnicach dążących do zera

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \neq \emptyset.$$

ZADANIE 6. Wykaż, że metryka d jest funkcją Lipschitzowską (podaj z jaką stałą) na $X \times X$ z metryką supremum.